

DS de mathématiques n°3 (durée : 1h30)

Le cheminement de votre pensée doit être apparent (autrement dit : il faut justifier ses réponses ;). Le barème est donné à titre indicatif, et des points seront attribués pour la présentation et la rédaction de la copie ; En particulier, mettez vos résultats en valeur, par exemple en les soulignant d'une autre couleur ou en les encadrant.

Les calculatrices et documents de tout type sont interdits.

Les exercices ou questions marqués d'une étoile (*) sont potentiellement plus difficiles que les autres.

Exercice 1 (7 pts). Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x^4 - 2x^3 - 10x^2 - 5x + 5}{2x^3 - 2x^2 - 10x - 6}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Sans poser de division euclidienne, déterminer

$$\text{pgcd}(2x^4 - 2x^3 - 10x^2 - 5x + 5, 2x^3 - 2x^2 - 10x - 6).$$

3. Effectuer la décomposition en éléments simples de $f(x)$, en détaillant chaque étape.

Exercice 2 (3 points).

1. Rappeler, aussi précisément que possible, la définition d'une racine de multiplicité n , ainsi que les propriétés qu'elle vérifie.
2. Soit n un entier naturel, a, b et c des réels et $P(X) = aX^2 + bX + c$. A quelle(s) condition(s) P admet-il 1 comme racine double ? Quelle forme prend alors le polynôme P ?

Exercice 3 (* 5 pts).

1. Décomposer $X^2 - 3X + 2$ en produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Quel est le reste dans la division euclidienne de $(X + 1)^n - X^n - 1$ par $X^2 - 3X + 2$? *Indication : on ne posera pas de calcul de division euclidienne ici.*
3. *Remarque : cette question n'a pas de lien direct avec les précédentes.* Rappeler la formule du binôme de Newton, et en déduire le degré de $(X + 1)^n - X^n - 1$, ainsi qu'une racine. Quelle est la multiplicité de cette racine ?

Exercice 4 (1,5 pts). On rappelle qu'un centre de symétrie d'une fonction f de coordonnées (a, b) vérifie l'équation suivante : $\frac{f(a+h) + f(a-h)}{2} = b$, valable pour tout h pour lequel les fonctions mises en jeu sont bien définies.

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{-x^2 - 3x - 1}{x - 1}$ admet un centre de symétrie d'abscisse 1.

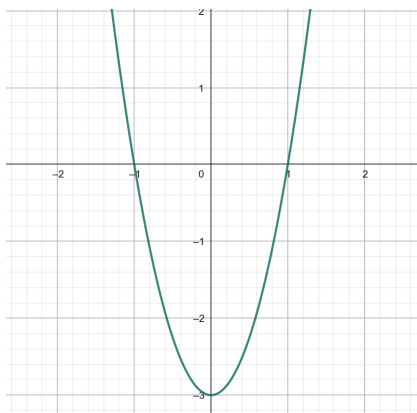
Exercice 5 (1,5 pts).

1. Rappeler les définitions d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
2. Déterminer la parité de la fonction $f : x \mapsto \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$.

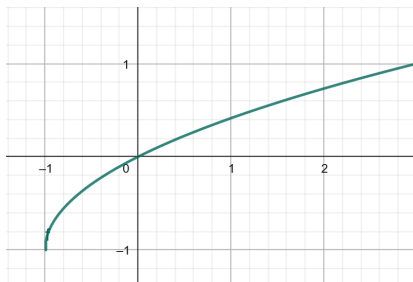
Exercice 6 (* 4 pts). Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$\ln |2x - 1| \leq -\ln |3x + 1|$$

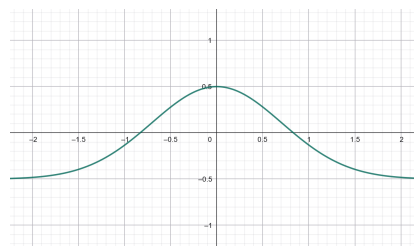
Exercice 7 (2 pts). Un.e étudiant.e de 1ère année de l'Isen Nantes (Oui, c'est bien de toi dont on parle.) a tracé les graphes de trois fonctions, ainsi que ceux de leur dérivée (voir ci-après). Malheureusement, comme cette personne n'est pas bien organisée, elle n'a noté aucune indication et ne sait maintenant plus quelles sont les paires allant ensemble. Aidez-la à remettre de l'ordre. Notez par exemple « (a) est la dérivée de (b) », en justifiant votre choix.



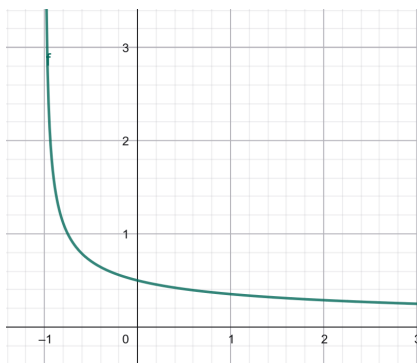
(a)



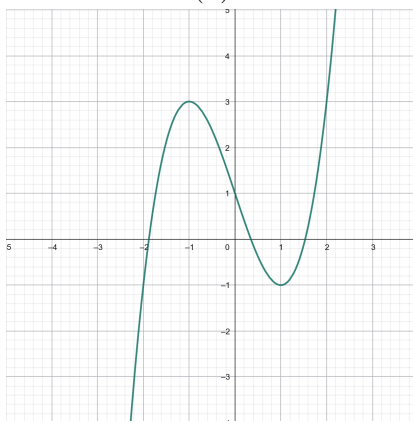
(b)



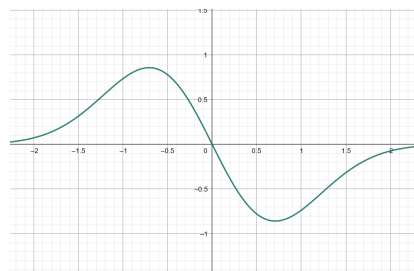
(c)



(d)



(e)



(f)

Le grand bazar de l'étudiant.

Exercice 8 (Bonus). Entre nous, la personne qui est à côté de toi, tu la trouves comment ?